VẬN TRÙ HỌC

Hà Văn Hiếu, Trương Quang Nhật

July 2021

Chương 1

Giới thiệu Vận trù học - Quy hoạch tuyến tính

1.1 Bài tập tự luận

Câu 1. Tìm dạng đối ngẫu của bài toán sau:

Maximize $z = 3x_1 + 5x_2$ trong điều kiện:

$$\begin{aligned} x_1 &\leq 4 \\ 2x_2 &\leq 12 \\ 3x_1 + 2x_2 &\leq 18 \end{aligned}$$

và $x_1, x_2 \geq 0$

Câu 2. Tìm dạng đối ngẫu của bài toán sau:

$$f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 5x_1 + 6x_2 + 7x_3 + 8x_4 \leq 9 \\ 10x_1 - 11x_2 + 12x_3 - 13x_4 = 14 \\ -15x_1 + 16x_2 - 17x_3 + 18x_4 \geq -19 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 3. Tìm dạng đối ngẫu của bài toán sau:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 - 4x_3 \leq -3 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 \geq 6 \\ 3x_1 + 5x_2 - 7x_3 \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 4. Tìm dạng đối ngẫu của bài toán sau:

$$f(x) = 2x_1 + x_2 - 8x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 + 2x_3 \leq 28 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 \geq 15 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 5. Tìm giá mờ của 3 ràng buộc 1-2-3 trong bài toán sau:

$$Z = x_1 - 7x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 & \leq 4 & (1) \\ 4x_1 - 3x_2 & \leq 2 & (2) \\ -3x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 3 & (3) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 6. Tìm giá mờ của 3 ràng buộc 1-2-3 trong bài toán sau:

$$Z = 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 + x_3 & \leq 4 & (1) \\ 2x_1 - x_2 + x_3 & \leq 2 & (2) \\ x_1 + x_2 + 3x_3 & \leq 12 & (3) \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 7. Tính reduced cost của các biến x_1, x_2, x_3 trong bài toán sau:

$$Z = -10x_1 - 12x_2 - 12x_3 \to \min$$
$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + 2x_3 & \leq 20 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq 20 \\ 2x_1 + 2x_2 + x_3 & \leq 20 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 8. Tính reduced cost của các biến x_1, x_2, x_3 trong bài toán sau:

$$Z = 5x_1 + 4x_2 + 3x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 + x_3 & \leq 5 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq 11 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 & \leq 8 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 9. Sử dụng phương pháp đơn hình tìm phương án tối ưu của bài toán QHTT sau:

$$Z = 3x + 2y \to \max$$
$$\begin{cases} 2x + y & \leq 18 \\ 2x + 3y & \leq 42 \\ 3x + y & \leq 24 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Câu 10. Sử dụng phương pháp đơn hình tìm phương án tối ưu của bài toán QHTT sau:

$$Z = 40x + 30y \to \max$$
$$\begin{cases} x + y & \leq 12 \\ 2x + y & \leq 16 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Câu 11. Sử dụng phương pháp đơn hình và phương pháp vẽ đồ thị để tìm phương án tối ưu của bài toán QHTT sau:

$$Z = 3x + 4y \to \max$$
$$\begin{cases} x + y & \leq 55 \\ 2x + 3y & \leq 120 \\ 12x + 30y & \leq 960 \\ x \geq 0, y \geq 0 \end{cases}$$

Câu 12. Chứng minh bài toán (A) là bài toán đối ngẫu của bài toán (B) và ngược lại.

(A):

$$Z = 4x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 2x_3 & \leq 6 \\ x_1 - 4x_2 + 2x_3 & \leq 0 \\ 5x_1 - 2x_2 - 2x_3 & \leq 4 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

(B):

$$Z' = 6y_1 + 4y_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 5y_3 & \geq 4 \\ y_1 - 4y_2 - 2y_3 & \geq -1 \\ 2y_1 + 2y_2 - 2y_3 & \geq 2 \\ y_1, y_2, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 13. Giả sử ràng buộc thứ i của bài toán QHTT là $2x_1 + x_2 \leq 50$, và giá trị tối ưu của hàm mục tiêu là 250. Ta thay đổi điều kiện thứ i này thành $2x_1 + x_2 \leq 55$, khi đó, bài toán đối ngẫu tương ứng với ràng buộc thứ i là y_j, có giá trị tối ưu là $y_j = 2.5$. Tìm giá trị tối ưu của hàm mục tiêu của bài toán QHTT lúc này.

Câu 14. Giả sử ràng buộc thứ i của bài toán QHTT là $3x_1 + 2x_2 \leq 10$, và giá trị tối ưu của hàm mục tiêu là 250. Ta thay đổi điều kiện thứ i này thành $3x_1 + 2x_2 \leq 5$, khi đó, bài toán đối ngẫu tương ứng với ràng buộc thứ i là y_j. Tìm giá trị tối ưu y_j biết giá trị của hàm mục tiêu của bài toán QHTT lúc này là 240.

Câu 15. Tìm phương án tối ưu của bài toán QHTT sau:

$$Z = 3x + 2y \to \max$$
$$\begin{cases} -x + 2y & \leq 4 \\ 3x + 2y & \leq 14 \\ x - y & \leq 3 \\ x, y \geq 0 \end{cases}$$

1.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Vận trù học là việc ứng dụng các phương pháp .... nhằm tìm kiếm các nghiệm tối ưu của bài toán.

A. kinh tế B. khoa học C. nghệ thuật D. Cả A và B

Câu 2. Trong vận trù học, các .... được xem xét cho từng tình huống.

A. mô hình Toán học

B. mô hình Vật lý

C. mô hình Kinh tế

D. Tất cả đều sai

Câu 3. Đâu là tính chất đối ngẫu yếu (Weak duality property) trong số các mệnh đề sau:

A. Nếu x và y lần lượt là các phương án của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu thì ta có $cx \leq yb$

B. Nếu x và y lần lượt là các phương án của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu thì ta có $cx \geq yb$

C. Nếu x và y lần lượt là các phương án của bài toán gốc và bài toán đối ngẫu thì ta có $cx = yb$

D. Tất cả đều sai

Câu 4. Từ bài toán QHTT, ta có thể lập được bài toán liên quan, gọi là:

A. Bài toán đối ngẫu

B. Bài toán chính tắc

C. Bài toán vận chuyển

D. Tất cả đều đúng

Câu 5. Nhận định nào sau đây là đúng về bài toán QHTT (P) và bài toán đối ngẫu (D) tương ứng?

A. Số ẩn của bài toán (D) bằng số ràng buộc chính của bài toán (P) và số ràng buộc chính của bài toán (D) bằng số ẩn của bài toán (P).

B. Hệ số của ẩn y_i trong hàm mục tiêu của bài toán (D) là số hạng tự do b_i trong hệ ràng buộc chính của bài toán (P).

C. Các hệ số của các ẩn và hệ số tự do trong ràng buộc chính thứ j của bài toán (D) là các hệ số tương ứng của ẩn x_j trong hệ ràng buộc chính và hàm mục tiêu của bài toán (P).

D. Tất cả đều đúng

Câu 6. Chúng ta sử dụng phân tích độ nhạy khi có:

A. Sự thay đổi của hệ số hàm mục tiêu

B. Sự thay đổi giá trị vế bên phải của ràng buộc

C. Cả A và B đều đúng

D. Cả A và B đều sai

Câu 7. Nhận định nào sau đây là đúng về giá mờ?

A. Là giá trị cải thiện của hàm tối ưu ứng với mỗi đơn vị tăng thêm

B. Cung cấp thông tin kinh tế giúp đưa ra quyết định về việc mua thêm tài nguyên

C. Giá mờ liên kết với một ràng buộc là sự thay đổi của giá trị tối ưu của hàm mục tiêu khi giá trị bên tay phải của ràng buộc đó tăng lên 1, còn các giá trị khác không thay đổi.

D. Cả A, B, C đều đúng.

Câu 8. Nhờ ...., khi ta biết được một phương án tối ưu của một trong hai bài toán của cặp bài toán đối ngẫu thì ta có thể tìm được tập phương án tối ưu của bài toán còn lại.

A. phương pháp đơn hình

B. các điều kiện ràng buộc

C. định lý độ lệch bù yếu

D. phương pháp vẽ đồ thị

Câu 9. Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán QHTT sau:

$$f(x) = x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 3x_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 \leq 20 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 = 18 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \geq 16 \\ x_j \geq 0 \quad \forall j = \overline{1,4} \end{cases}$$

A.

$$g(y) = 20y_1 + 18y_2 + 16y_3 \to min$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

B.

$$g(y) = 20y_1 + 18y_2 + 16y_3 \to min$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

C.

$$g(y) = 18y_1 + 20y_2 + 16y_3 \to min$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

D.

$$g(y) = 18y_1 + 20y_2 + 16y_3 \to min$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + 2y_3 \geq 1 \\ y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 2 \\ y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ 2y_1 + 4y_2 + y_3 \geq 3 \\ y_1 \geq 0, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

Câu 10. Tìm bài toán đối ngẫu của bài toán sau:

$$f(x) = 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 + x_4 \to \min$$
$$\begin{cases} 4x_1 - 6x_2 + 5x_3 - 5x_4 \leq 50 \\ 7x_1 + x_3 + x_4 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \geq -25 \\ x_1 \geq 0, x_2 \leq 0 \end{cases}$$

A.

$$g(y) = 50y_1 + 30y_2 - 25y_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 4y_1 + 7y_2 + 2y_3 \leq 3 \\ -6y_1 + 3y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + y_2 - 5y_3 \geq -5 \\ -5y_1 + y_2 \geq 1 \\ y_1 \leq 0, y_2 \text{ tuỳ ý}, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

B.

$$g(y) = 50y_1 + 30y_2 - 25y_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 4y_1 + 7y_2 + 2y_3 \leq 3 \\ -6y_1 + 3y_3 \geq 2 \\ 5y_1 + y_2 - 5y_3 = -5 \\ -5y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 \leq 0, y_2 \text{ tuỳ ý}, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

C.

$$g(y) = 50y_1 + 30y_2 - 25y_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 4y_1 + 7y_2 + 2y_3 \geq 3 \\ -6y_1 + 3y_3 \leq 2 \\ 5y_1 + y_2 - 5y_3 = -5 \\ -5y_1 + y_2 \leq 1 \\ y_1 \leq 0, y_2 \leq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

D.

$$g(y) = 50y_1 + 30y_2 - 25y_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 4y_1 + 7y_2 + 2y_3 \leq 3 \\ -6y_1 + 3y_3 \leq 2 \\ 5y_1 + y_2 - 5y_3 = -5 \\ -5y_1 + y_2 = 1 \\ y_1 \leq 0, y_2 \geq, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 11. Nhận định nào sau đây là đúng khi nói về Reduced cost?

A. Reduced cost liên kết với một ràng buộc dấu được định nghĩa là giá mờ của ràng buộc ấy

B. Reduced cost tương ứng với một ràng buộc là hiệu của giá trị của hàm mục tiêu của hai bài toán tương ứng khi thay đổi giá trị của ràng buộc.

C. Cả A và B đều đúng

D. Cả A và B đều sai

Câu 12. Nhận định nào sau đây là sai khi nói về mối quan hệ giữa bài toán gốc và bài toán đối ngẫu?

A. Nếu bài toán gốc có phương án và hàm mục tiêu bị chặn dưới đối với bài toán max thì bài toán đối ngẫu cũng có phương án và hàm mục tiêu của nó bị chặn dưới.

B. Nếu bài toán gốc có phương án, nhưng hàm mục tiêu không bị chặn trên đối với bài toán max thì bài toán đối ngẫu không có phương án nào.

C. Nếu bài toán gốc không có phương án thì bài toán đối ngẫu hoặc là không có phương án hoặc hàm mục tiêu không bị chặn trên (dưới).

D. Bài toán đối ngẫu và bài toán gốc có quan hệ đối xứng với nhau.

Câu 13. Giá trị tối ưu của hàm mục tiêu trong bài toán QHTT dưới đây là bao nhiêu?

$$z = 2x_1 - x_2 + 2x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 10 \\ x_1 + 2x_2 - 2x_3 \leq 20 \\ x_2 + 2x_3 \leq 5 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

A. 12 B. 15 C. 20 D. 22

Câu 14. Giá trị tối ưu của hàm mục tiêu trong bài toán QHTT dưới đây là bao nhiêu?

$$z = 3x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$$
$$\begin{cases} 4x_1 + x_2 + x_3 = 30 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 60 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 40 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

A. 30 B. 40 C. 45 D. 50

Câu 15. Giá trị tối ưu của hàm mục tiêu trong bài toán QHTT dưới đây là bao nhiêu?

$$z = 4x_1 + 6x_2 \to \max$$
$$\begin{cases} -x_1 + x_2 \leq 11 \\ x_1 + x_2 \leq 27 \\ 2x_1 + 5x_2 \leq 90 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

A. 90 B. 125 C. 132 D. 140

1.3 Đáp án

1.3.1 Phần trắc nghiệm

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
B	A	A	A	D	C	D	C	A	B	C	A	B	C	C

Câu 1. Dựa vào bảng đối ngẫu dưới đây:

	x_1	x_2	
y_1	1	0	≤ 4
y_2	0	2	≤ 12
y_3	3	2	≤ 18
	VI	VI	
	3	5	

Ta có dạng đối ngẫu của bài toán trên như sau:

Minimum $w = 4y_1 + 12y_2 + 18y_3$ trong điều kiện:

$$y_1 + 3y_3 \geq 3$$
$$2y_2 + 2y_3 \geq 5$$

và $y_1, y_2, y_3 \geq 0$

Câu 2. Tương tự bài 1 ta có bài toán đối ngẫu sau:

$$g(y) = 9y_1 + 14y_2 - 19y_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 5y_1 + 10y_2 - 15y_3 \geq 1 \\ 6y_1 - 11y_2 + 16y_3 \geq -2 \\ 7y_1 + 12y_2 - 17y_3 \geq 3 \\ 8y_1 - 13y_2 + 18y_3 = -4 \\ y_1 \geq 0, y_2 \text{ tuỳ ý}, y_3 \leq 0 \end{cases}$$

Câu 3. Tương tự bài 1 ta có bài toán đối ngẫu sau:

$$g(y) = 2y_1 - 3y_2 + 6y_3 + 8y_4 \to \max$$
$$\begin{cases} 2y_1 + y_2 + y_3 + 3y_4 \leq 1 \\ 3y_1 - y_2 + y_3 + 7y_4 \leq 2 \\ y_1 + 4y_2 + 2y_3 + 7y_4 \geq -3 \\ y_2, y_4 \leq 0, y_3 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 4. Tương tự bài 1 ta có bài toán đối ngẫu sau:

$$g(y) = 28y_1 + 10y_2 + 15y_3 \to \min$$
$$\begin{cases} 7y_1 + 3y_2 + 2y_3 \geq 2 \\ 4y_1 - y_2 + 3y_3 \geq 1 \\ 2y_1 + 3y_2 - y_3 \geq -8 \\ y_3 \leq 0, y_1 \geq 0 \end{cases}$$

Câu 5. Ta tìm được nghiệm tối ưu là $(x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (0.5, 0, 4.5)$ và $Z = 14$

Từ đây, ta có các bảng tính toán sau:

Bas Var	Eq No	Z	Coefficient of X1	X2	X3	X4	X5	X6	Right Side
Z	0	1	-1	7	-3	0	0	0	0
X4	1	0	2	1	-1	1	0	0	4
X5	2	0	4	-3	0	0	1	0	2
X6	3	0	-3	2	1	0	0	1	3

Bas Var	Eq No	Z	Coefficient of X1	X2	X3	X4	X5	X6	Right Side
Z	0	1	-10	13	0	0	0	3	9
X4	1	0	-1	3	0	1	0	1	7
X5	2	0	4	-3	0	0	1	0	2
X3	3	0	-3	2	1	0	0	1	3

Bas Var	Eq No	Z	Coefficient of X1	X2	X3	X4	X5	X6	Right Side
Z	0	1	0	5.5	0	0	2.5	3	14
X4	1	0	0	2.25	0	1	0.25	1	7.5
X1	2	0	1	-0.75	0	0	0.25	0	0.5
X3	3	0	0	-0.25	1	0	0.75	1	4.5

Từ đây ta có, giá mờ lần lượt cho các ràng buộc đã cho là 0, 2.5, 3.

Câu 6. Giải tương tự câu 5, ta tìm được giá mờ lần lượt cho các ràng buộc đã cho là 0.5, 2.5, 0.

Câu 7. Sử dụng phương pháp đơn hình, ta tìm được reduced cost lần lượt cho các biến x_1, x_2, x_3 là 3.6, 1.6, 1.6.

Câu 8. Tương tự, ta tính được reduced cost lần lượt cho các biến x_1, x_2, x_3 là 5, 4, 3.

Câu 9. Nghiệm tối ưu $(x^*, y^*) = (3, 12)$

Câu 10. Nghiệm tối ưu $(x^*, y^*) = (4, 8)$

Câu 11. Nghiệm tối ưu $(x^*, y^*) = (45, 10)$

Câu 12. SV tự giải

Câu 13. Áp dụng công thức $\Delta Z = y_j \times b_i = 2.5 \times 5 = 12.5$. Do đó, giá trị tối ưu của hàm mục tiêu mới là 262.5.

Câu 14. $y_j = 2$

Câu 15. Nghiệm tối ưu $(x^*, y^*) = (4, 1)$

Chương 2

Bài toán Vận tải - Transportation problem

2.1 Bài tập tự luận

Để có sự so sánh ưu, nhược điểm giữa các phương pháp thì tất cả các câu hỏi trong mục này sử dụng cùng một bảng vận tải như sau:

From \ To	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**3**	**4**	**5**	**150**
2	**1**	**2**	**7**	**175**
3	**4**	**5**	**12**	**275**
Demand	**200**	**200**	**200**	**600**

Câu 1. Xác định bài toán QHTT tương ứng với bài toán vận tải trên.

Câu 2. Xác định phương án ban đầu bằng phương pháp góc Tây-Bắc (North-West corner rule).

Câu 3. Xác định phương án ban đầu bằng phương pháp góc Tây bắc (North-West corner rule). Nêu tất cả các đặc điểm liên quan đến phương án vừa xác định được (không bao gồm đánh giá tối ưu).

Câu 4. Xác định phương án ban đầu bằng phương pháp góc chi phí rẻ nhất (the intuitive lowest-cost rule).

Câu 5. Xác định phương án ban đầu bằng phương pháp góc chi phí rẻ nhất (the intuitive lowest-cost rule). Nêu tất cả các đặc điểm liên quan đến phương án vừa xác định được (không bao gồm đánh giá tối ưu).

Câu 6. Xác định phương án ban đầu bằng phương pháp góc xấp xỉ Vogel (Vogel's approximation method).

Câu 7. Xác định phương án ban đầu bằng phương pháp góc xấp xỉ Vogel (Vogel's approximation method). Nêu tất cả các đặc điểm liên quan đến phương án vừa xác định được (không bao gồm đánh giá tối ưu).

Câu 8. Xác định một phương án ban đầu bằng phương pháp góc Tây-Bắc. Sử dụng phương pháp duyệt tuần tự (Stepping-stone method) để tìm nghiệm tối ưu của bài toán.

Câu 9. Xác định một phương án ban đầu bằng phương pháp góc chi phí rẻ nhất. Sử dụng phương pháp duyệt tuần tự (Stepping-stone method) để tìm nghiệm tối ưu của bài toán.

Câu 10. Xác định một phương án ban đầu bằng phương pháp xấp xỉ Vogel. Sử dụng phương pháp duyệt tuần tự (Stepping-stone method) để tìm nghiệm tối ưu của bài toán.

2.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Để tìm một phương án ban đầu cho bài toán vận tải, người ta sử dụng phương pháp nào sau đây (khoanh tròn tất cả đáp án đúng)?

A. Phương pháp đơn hình.

B. Phương pháp điểm trong.

C. Phương pháp chi phí rẻ nhất.

D. Phương pháp duyệt tuần tự.

Câu 2. Trong phương pháp góc tây bắc (northwest corner method), ô đầu tiên được phân bổ là ô nào?

A. Ô đầu tiên của dòng cuối cùng của bảng vận tải.

B. Ô đầu tiên của dòng đầu tiên của bảng vận tải.

C. Ô có chi phí thấp nhất trong bảng vận tải.

D. Ô có chi phí cao nhất trong bảng vận tải.

Câu 3. Khi mà tổng cung (total demand) bằng với tổng cầu (total supply) thì bài toán vận tải có đặc điểm nào sau đây (khoanh tròn tất cả đáp án đúng)?

A. Bài toán vận tải đạt trạng thái cân bằng.

B. Bài toán vận tải không đạt trạng thái cân bằng.

C. Bài toán vận tải luôn có nghiệm tối ưu.

D. Cả 3 phương án trên đều sai.

Câu 4. Phương pháp nào sau đây được sử dụng để tìm phương án tối ưu từ một phương án cực biên ban đầu?

A. Phương pháp xấp xỉ Vogel (Vogel's approximation method)

B. Phương pháp duyệt tuần tự (Stepping stone method)

C. Phương pháp góc Tây bắc (North-West corner rule)

D. Phương pháp chi phí rẻ nhất (Intuitive Lowest-cost rule)

Câu 5. Giả sử trong một bài toán vận tải từ 3 kho hàng (sources) đến 4 đích (destinations). Bạn được cho biết là bài toán vận tải trên đã đạt trạng thái cân bằng. Bạn được đề xuất một phương án trong đó mỗi kho đều có vận chuyển đến tất cả các đích. Bạn đánh giá như thế nào về phương án này.

A. Phương án này chắc chắn không phải là một phương án tối ưu, nhưng có thể là một phương án cực biên.

B. Phương án này có thể là một phương án tối ưu, tùy thuộc vào chi phí vận chuyển từ các kho đến các đích.

C. Phương án này không phải là một phương án cực biên nên nó cũng không phải là một phương án tối ưu.

D. Chưa thể kết luận được gì vì chưa biết chi phí vận chuyển từ các kho đến các đích.

Câu 6. Bài toán vận tải là bài toán tối ưu chi phí vận chuyển của

A. một sản phẩm từ một nguồn (source) đến một vài đích (destinations).

B. một vài sản phẩm từ một nguồn đến một đích.

C. một sản phẩm từ một vài nguồn đến một đích.

D. một vài sản phẩm từ một vài nguồn đến một vài đích.

Câu 7. Cho bảng vận tải như bên dưới. Xác định một phương án bằng phương pháp góc tây bắc (North-West corner rule).

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6**	**8**	**10**	**120**
2	**7**	**11**	**11**	**180**
3	**4**	**5**	**12**	**300**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

A. Phân bổ 120 vào ô $1A$, 80 vào ô $2A$, 100 vào ô $2B$ và 300 vào ô $3C$.

B. Phân bổ 120 vào ô $1A$, 80 vào ô $2A$, 80 vào ô $2B$, 20 vào ô $2C$, 20 vào ô $3C$ và 280 vào ô $3C$.

C. Phân bổ 200 vào ô $3A$, 100 vào ô $3B$, 120 vào ô $1C$, và 180 vào ô $2C$.

D. Một đáp án khác.

Câu 8. Một điểm bất lợi khi sử dụng phương pháp góc Tây bắc (North-West Corner rule) để tìm phương án đầu tiên là:

A. phương pháp này quá phức tạp.

B. phương pháp này không xem xét tới chi phí của việc vận chuyển.

C. phương pháp này cho ra một phương án không phải là cực biên hoặc là cực biên nhưng suy biến.

D. phương pháp này có thể cho ra một phương án sai.

Câu 9. Phương án ban đầu tìm được bằng cách áp dụng phương pháp chi phí rẻ nhất (intuitive lowest-cost rule) thì luôn tốt hơn phương án ban đầu tìm được bằng phương pháp góc Tây Bắc vì phương pháp góc Tây Bắc không xem xét tới chi phí vận chuyển trong khi phương pháp chi phí rẻ nhất có xem xét tới chi phí vận chuyển. Khẳng định trên đúng hay sai?

A. Đúng. B. Sai.

Câu 10. Cho bảng vận tải như bên dưới. Xác định phương án ban đầu bằng phương pháp chi phí rẻ nhất (the intuitive lowest-cost rule).

From \ To	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6**	**8**	**10**	**120**
2	**7**	**11**	**11**	**180**
3	**4**	**5**	**12**	**300**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

A. Phân bổ 120 vào ô $1A$, 80 vào ô $2A$, 100 vào ô $2B$ và 300 vào ô $3C$.

B. Phân bổ 120 vào ô $1A$, 80 vào ô $2A$, 80 vào ô $2B$, 20 vào ô $2C$, 20 vào ô $3C$ và 280 vào ô $3C$.

C. Phân bổ 200 vào ô $3A$, 100 vào ô $3B$, 120 vào ô $1C$, và 180 vào ô $2C$.

D. Một đáp án khác.

Câu 11. Khi áp dụng phương pháp xấp xỉ Vogel (Vogel's approximation method) thì chi phí cơ hội (row and column penalties) được xác định bằng cách:

A. tìm chi phí lớn nhất trong mỗi hàng và cột.

B. tìm chi phí thấp nhất trong mỗi hàng và cột.

C. tìm tổng của chi phí ở mỗi hàng và cột.

D. tìm hiệu của hai chi phí thấp nhất ở mỗi hàng và cột.

Câu 12. Cho bảng vận tải như bên dưới. Xác định phương án ban đầu bằng phương pháp xấp xỉ Vogel (Vogel's approximation method).

From \ To	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6**	**8**	**10**	**120**
2	**7**	**11**	**11**	**180**
3	**4**	**5**	**12**	**300**
Demand	**100**	**100**	**400**	**600**

A. Phân bổ 100 vào ô $1A$, 20 vào ô $1B$, 80 vào ô $2B$, 100 vào ô $2C$ và 300 vào ô $3C$.

B. Phân bổ 100 vào ô $3A$, 100 vào ô $3B$, 120 vào ô $1C$, 180 vào ô $2C$, và 100 vào ô $3C$.

C. Phân bổ 100 vào ô $2A$, 100 vào ô $3B$, 120 vào ô $1C$, và 80 vào ô $2C$ và 200 vào ô $3C$.

D. Một đáp án khác.

Câu 13. Bất kì bài toán vận tải nào

A. luôn chỉ có một phương án tối ưu.

B. luôn cân bằng, hoặc nếu không cân bằng thì số nguồn giả (dummy sources) phải bằng với số đích giả (dummy destinations).

C. luôn có chi phí vận chuyển mỗi đơn vị hàng hóa từ một nguồn đến một đích không phụ thuộc vào khối lượng hàng hóa vận chuyển.

D. luôn có tất cả các phương án là phương án cực biên.

Câu 14. Phương án của một bài toán vận tải cân bằng với m dòng (nguồn, sources) và n cột (đích, destination) là một phương án cực biên không suy biến nếu nó có số các phần tử dương bằng với

A. $m+n$ B. mn C. $m+n-1$ D. $m+n+1$

Câu 15. Phương pháp duyệt tuần tự (the stepping-stone method) dùng để

A. xác định một phương án có phải là phương án cực biên hay không.

B. xác định một phương án cực biên ban đầu.

C. xác định một dãy các phương án mới ngày càng tốt hơn từ một phương án cực biên ban đầu cho đến khi xác định được phương án tối ưu.

D. xác định một phương án cực biên ban đầu, sau đó xác định một dãy các phương án mới ngày càng tốt hơn từ phương án cực biên đó cho đến khi xác định được phương án tối ưu.

Câu 16. Cho bảng vận tải với một phương án ban đầu như sau:

To / From	A	B	C	Supply
1	**6** **100**	**9**	**10**	**100**
2	**7** **20**	**11** **80**	**11**	**100**
3	**4**	**5** **100**	**12** **300**	**400**
Demand	**120**	**180**	**300**	**600**

Xác định chỉ số cải tiến cho ô $1B$.

A. 0 B. 1 C. -1 D. -2

Câu 17. Trong phương pháp duyệt tuần tự (the stepping-stone method), một chu trình (closed loop) phải thỏa mãn những tính chất nào sau đây? (khoanh tròn tất cả đáp án đúng).

A. Không đi qua 3 ô của cùng một hàng hoặc một cột.

B. Có thể đi qua 2 ô trống.

C. Chỉ có thể đi theo hàng ngang hoặc hàng dọc.

D. Có thể đi qua 3 ô đã được gán giá trị (trong phương án ban đầu).

Câu 18. Cho bảng vận tải với một phương án ban đầu như sau:

To / From	A	B	C	Supply
1	6 100	9	20	100
2	7 20	11 80	22	100
3	4	5 100	12 300	400
Demand	120	180	300	600

Xác định phương án tốt hơn tiếp theo bằng phương pháp duyệt tuần tự.

A. Phân bổ 20 vào ô $1A$, 80 vào ô $1B$, 100 vào ô $2A$, 100 vào ô $3B$ và 300 vào ô $3C$.

B. Phân bổ 100 vào ô $1A$, 20 vào ô $2A$, 80 vào ô $2C$, 180 vào ô $3B$ và 220 vào ô $3C$.

C. Phân bổ 100 vào ô $1A$, 100 vào ô $2B$, 20 vào ô $3A$, 80 vào ô $3B$ và 300 vào ô $3C$.

D. Một đáp án khác.

2.3 Đáp án

Đáp án phần trắc nghiệm: 1C, 2B, 3AC, 4B, 5C, 6D, 7A, 8B, 9A, 10C, 11D, 12C, 13C, 14C, 15C, 16C, 17AC, 18A.

Tiếp theo là đáp án (hướng dẫn) cho phần bài tập tự luận. Một số bài tập sử dụng lại bảng vận tải của bài tập trước. Nhằm mục đích so sánh giữa các phương án, phương pháp.

Câu 1. Gọi $x_{1A}, x_{1B}, x_{1C}, x_{2A}, x_{2B}, x_{2C}, x_{3A}, x_{3B}, x_{3C}$ lần lượt là lượng hàng hóa vận chuyển từ các nguồn 1, 2, 3 đến các trạm A, B, C. Bài toán QHTT tương ứng là cực tiểu hóa hàm chi phí

$$3x_{1A} + 4x_{1B} + 5x_{1C} + x_{2A} + 2x_{2B} + 7x_{2C} + 4x_{3A} + 5x_{3B} + 12x_{3C}$$

với các ràng buộc như sau:

$$
\begin{aligned}
x_{1A} + x_{1B} + x_{1C} &= 150 \\
x_{2A} + x_{2B} + x_{2C} &= 175 \\
x_{3A} + x_{3B} + x_{3C} &= 275 \\
x_{1A} + x_{2A} + x_{3A} &= 200 \\
x_{1B} + x_{2B} + x_{3B} &= 200 \\
x_{1C} + x_{2C} + x_{3C} &= 200 \\
x_{1A}, x_{1B}, x_{1C} &\geq 0 \\
x_{2A}, x_{2B}, x_{2C} &\geq 0 \\
x_{3A}, x_{3B}, x_{3C} &\geq 0
\end{aligned}
$$

Câu 2. Ý tưởng của phương pháp góc Tây-Bắc là chúng ta sẽ phân phối nhiều nhất có thể vào ô đầu tiên bên tay trái của bảng vận tải (nhiều nhất ở đây có thể là không vượt quá phạm vi cung cấp của nguồn hay phạm vi chứa của đích). Như vậy, đầu tiên ta sẽ phân phối nhiều nhất có thể vào trong ô 1A. Do nguồn 1 chỉ có thể cung cấp tối đa 150, trong khi đích A có thể chứa được 200, nên ta có thể phân phối tối đa 150 vào ô 1A. Và như vậy, ta được bảng sau với ô 1A đã được điền như sau:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6** **150**	**8**	**10**	**150**
2	**7**	**11**	**11**	**175**
3	**4**	**5**	**12**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Sau khi phân phối 150 vào ô 1A thì nguồn 1 đã không còn hàng hóa nữa, trong khi đích A vẫn còn cần thêm 50 (đơn vị hàng hóa). Vì vậy ta có thể xóa đi dòng 1 của bảng, và thay giá trị ở đích A bằng 50 để được bảng mới như sau:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6** **150**	**8**	**10**	**150**
2	**7**	**11**	**11**	**175**
3	**4**	**5**	**12**	**275**
Demand	**50**	**100**	**300**	**450**

Tiếp tục phân phối lớn nhất có thể vào bảng mới ở trên, ta được giá trị phân phối như sau: phân phối 50 vào ô 2A, sau đó phân phối 100 vào ô 2B, rồi 25 vào ô 2C và cuối cùng là 275 vào ô 3C. Phương án cuối cùng được thể hiện ở bảng sau (các ô không được điền số thì mặc định là không phân phối).

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6** **150**	**8**	**10**	**150**
2	**7** **50**	**11** **100**	**11** **25**	**175**
3	**4**	**5**	**12** **275**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Câu 3. Ở câu 2, ta đã xác định được phương án ban đầu bằng phương pháp góc Tây-Bắc là

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6** **150**	**8**	**10**	**150**
2	**7** **50**	**11** **100**	**11** **25**	**175**
3	**4**	**5**	**12** **275**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Bây giờ ta sẽ nêu tất cả các đặc điểm liên quan đến phương án vừa xác định được (không bao gồm đánh giá tối ưu).

- Đầu tiên ta nhận thấy phương án này có $5 = 3 + 3 - 1$ phần tử dương, nên đây là một phương án cực biên không suy biến của bài toán QHTT tương ứng.
- Giá trị của hàm mục tiêu tại phương án này là:

$$150 \cdot 6 + 50 \cdot 7 + 100 \cdot 11 + 25 \cdot 11 + 275 \cdot 12 = 5925.$$

Câu 4. Trong số các chi phí thể hiện trong bảng vận tải:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6**	**8**	**10**	**150**
2	**7**	**11**	**11**	**175**
3	**4**	**5**	**12**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

thì ta nhận thấy chi phí (cost) thấp nhất là 4 nằm ở ô 3A. Vì vậy, ta sẽ gán các giá trị cho bảng vận tải theo từng bước như sau:

- Đầu tiên ta gán tối đa vào ô có chi phí vận chuyển thấp nhất (4) ở ô 3A. Ô 3A biểu thị cho lượng hàng hóa vận chuyển từ nguồn 3 tới đích A. Ta thấy nguồn

3 có khả năng phân phối tối đa là 275, trong khi đích A chỉ có khả năng nhận là 200. Vì thế, ta chỉ có thể phân phối tối đa là 200 vào ô 3A này và được bảng sau:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6**	**8**	**10**	**150**
2	**7**	**11**	**11**	**175**
3	**4** **200**	**5**	**12**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Sau khi phân phối như vậy thì ta nhận thấy đích A đã không còn có thể nhận thêm hàng hóa nữa, nên ta sẽ xóa cột A ra khỏi bảng.

- Bây giờ chỉ còn 2 cột là cột B và cột C, thì trong đó chi phí thấp nhất tiếp theo là 5 ở ô 3B. Nguồn 3 lúc này chỉ còn 75 (đơn vị hàng hóa) do đã phân phối 200 cho đích A. Trong khi đó đích B lại có thể nhận tối đa là 100. Nên ta có thể phân phối tối đa cho ô 3B là 75. Lúc này thì nguồn 3 đã phân phối hết, nhưng đích B vẫn còn cần 25. Ta sẽ xóa tiếp dòng 3 để được bảng phân phối mới như sau:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6**	**8**	**10**	**150**
2	**7**	**11**	**11**	**175**
3	**4** **200**	**5** **75**	**12**	**275**
Demand	**200**	**25**	**300**	**325**

- Tiếp tục như vậy, ta thấy trong các chi phí thì 8 ở cô 1B là thấp nhất, ta sẽ phân phối tối đa là 25 vào ô này, sau đó là 125 vào ô 1C, và cuối cùng là 175 vào ô 2C.

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	[6]	[8] **25**	[10] **125**	**150**
2	[7]	[11]	[11] **175**	**175**
3	[4] **200**	[5] **75**	[12]	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Câu 5. Ở câu 4, ta đã được phương án ban đầu bằng cách sử dụng phương pháp chi phí thấp nhất như sau:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	[6]	[8] **25**	[10] **125**	**150**
2	[7]	[11]	[11] **175**	**175**
3	[4] **200**	[5] **75**	[12]	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Phương án này có các đặc điểm như sau:

- Phương án này là một phương án cực biên không suy biến của bài toán QHTT tương ứng, vì số các thành phần dương của nó là $5 = 3 + 3 - 1$.
- Giá trị của hàm mục tiêu tại phương án này là

$$4 \cdot 200 + 8 \cdot 25 + 5 \cdot 75 + 10 \cdot 125 + 11 \cdot 175 = 4550$$

- Phương án này tốt hơn phương án ban đầu tìm được bằng phương pháp góc Tây-Bắc.

Câu 6. Để chọn ô cần gán trong phương pháp xấp xỉ Vogel, ta cần quan tâm đến chi phí bé nhất và *chi phí cơ hội* (row and column penalties, viết tắt là CPCH) lớn nhất. Trong đó CPCH ở mỗi hàng và mỗi cột là hiệu của chi phí vận chuyển bé thứ nhì và chi phí vận chuyển bé nhất ở mỗi hàng và mỗi cột đó. Ví dụ như trong bảng vận tải sau đây:

To / From	A	B	C	Supply
1	6	8 25	10 125	150
2	7	11	11 175	175
3	4 200	5 75	12	275
Demand	200	100	300	600

thì chi phí cơ hội của hàng 1 bằng với 2 vì hai chi phí thấp nhất trong hàng 1 là 6 và 8, và hiệu của chúng là $8 - 6 = 2$. Tương tự như vậy, ta có chi phí cơ hội của các hàng 2,3 và các cột A, B, C lần lượt là 4, 1, và 2, 3, 1. Ta có thể điền vào bảng như sau:

To / From	A	B	C	Supply	
1	6	8	10	150	2
2	7	11	11	175	4
3	4	5	12	275	1
Demand	200	100	300	600	
	2	3	1		

Như vậy,

- chi phí cơ hội ở hàng 2 là lớn nhất, và trong hàng 2 thì chi phí thấp nhất là 7 nằm ở ô 2A. Do vậy ta phân phối tối đa vào ô 2A này, giá trị có thể phân phối tối đa là 175. Do nguồn 2 đã phân phối hết, nên ta sẽ xóa dòng 2, và tính toán lại chi phí cơ hội.
- chi phí cơ hội sau khi xóa dòng 2 là: 2 (dòng 1), 1 (dòng 3), 2 (cột A), 3 (cột B) và 2 (cột C). Lưu ý rằng do dòng 2 bị xóa nên cột C chỉ còn 2 chi phí vận chuyển là 10 và 12, vì vậy chi phí cơ hội của dòng này lúc bấy giờ sẽ là 2 chứ không phải là 1 như đầu tiên nữa. Như vậy chi phí cơ hội lớn nhất lúc bấy giờ là ở cột B.

To / From	A	B	C	Supply		
1	**6**	**8**	**10**	**150**	**2**	**2**
~~**2**~~	**7** **175**	**11**	**11**	**175**	**4**	
3	**4**	**5**	**12**	**275**	**1**	**1**
Demand	**25**	**100**	**300**	**425**		
	2	**3**	**1**			
	2	**3**	**2**			

- Trong cột B ở bảng mới bên trên (sau khi xóa đi dòng 2) thì chi phí thấp nhất là 5 ở ô 3B, ta sẽ phân phối tối đa có thể vào ô này, là 100. Lúc này đích B đã phân phối tối đa, nên ta sẽ xóa đi cột B và tiếp tục cập nhật chi phí cơ hội và lặp lại từ bước đầu tiên.

- Tổng hợp lại, ta được sự phân phối lần lượt như sau: 175 cho ô 2A, 100 cho ô 3B, 25 cho ô 3A, 150 cho ô 1C, và cuối cùng là 150 cho ô 3C.

To / From	A	B	C	Supply
1	**6**	**8**	**10** **150**	**150**
2	**7** **175**	**11**	**11**	**175**
3	**4** **25**	**5** **100**	**12** **150**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Câu 7. Ở câu 6, ta đã có phương án ban đầu bằng cách áp dụng phương pháp xấp xỉ Vogel như sau:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	[6]	[8]	[10] **150**	**150**
2	[7] **175**	[11]	[11]	**175**
3	[4] **25**	[5] **100**	[12] **150**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Phương án này có các đặc điểm như sau:

- Phương án này là một phương án cực biên không suy biến vì số các thành phần dương của nó cũng là 5.
- Phương án này có giá trị hàm mục tiêu là

$$7 \cdot 175 + 4 \cdot 25 + 5 \cdot 100 + 10 \cdot 150 + 12 \cdot 150 = 5125.$$

- Phương án này tốt hơn so với phương án ban đầu đạt được bằng phương pháp góc Tây-Bắc, nhưng không tốt bằng phương án ban đầu đạt được bằng phương pháp chi phí rẻ nhất.

Câu 8. Ta đã biết phương án ban đầu đạt được bằng cách sử dụng phương pháp góc Tây-Bắc ở câu 2 là:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	[6] **150**	[8]	[10]	**150**
2	[7] **50**	[11] **100**	[11] **25**	**175**
3	[4]	[5]	[12] **275**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Ta cũng biết phương án này không phải là phương án tối ưu, vì ở câu 4 và câu 6 ta tìm ra được 2 phương án ban đầu mới tốt hơn. Bây giờ ta sẽ dựa vào phương án ở bảng trên để tìm phương án tối ưu bằng phương pháp duyệt tuần tự (stepping-stone method). Nội dung chủ yếu của phương pháp duyệt tuần tự là ta sẽ tạo ra các chu trình, mà sự thay đổi phương án vận chuyển trong chu trình này sẽ tạo ra một phương án mới tốt hơn. Để làm được việc ấy, ta sẽ bắt đầu từ một ô trống và tìm một chu trình thích hợp cho nó, sau đó ta sẽ xem xét xem trong chu trình này thì phương án ấy đã tối ưu chưa, nếu tối ưu rồi thì ta bỏ qua và đi đến ô trống mới (đây chính là dấu hiệu tối ưu). Còn nếu chu trình tương ứng của ô trống cải tiến được (để ra phương án tốt hơn) thì ta sẽ cải tiến nó. Nội dung cụ thể sẽ minh họa qua các bước sau:

Bước 1.

- Các ô trống lần lượt là 1B, 1C, 3A và cuối cùng là 3B.
- Chu trình tương ứng với ô 1B là: 1B-2B-2A-1A. Chỉ số cải tiến cho ô 1B là $I_{1B} = 7 + 8 - 6 - 11 = -2 < 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 1C là: 1C-2C-2A-1A. Chỉ số cải tiến cho ô 1C là $I_{1C} = 10 + 7 - 6 - 11 = 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 3A là: 3A-2A-2C-3C. Chỉ số cải tiến cho ô 3A là $I_{3A} = 4 + 11 - 7 - 12 = -4 < 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 3B là: 3B-2B-2C-3C. Chỉ số cải tiến là $I_{3B} = 5 + 11 - 11 - 12 = -7 < 0$.
- Phương án chưa tối ưu vì vẫn tồn tại chỉ số cải tiến âm. Trong các chỉ số cải tiến trên thì chỉ số cải tiến I_{3B} có giá trị âm lớn nhất. Ta sẽ chọn cải tiến chu trình này.
- Trong chu trình của ô 3B này ta sẽ gán lần lượt từng giá trị "+, −" như sau: ô đầu tiên (tức là 3B) là "+", ô tiếp theo (tức là 2B) là "−", ô tiếp theo (tức là 2C) là "+", và ô cuối cùng (tức là ô 3C) là "−".
- Trong các ô được đánh dấu "−" (tức là 3C và 2B), ta chọn ra ô có phân phối ít nhất (tức là 2B, và phân phối này là 100). Sau đó ở các ô trừ, ta sẽ trừ đi một lượng là 100 (lượng phân phối ít nhất) và ở các ô "+", ta sẽ cộng thêm 100, và được phương án mới như sau:

From \ To	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6** / **150**	**8**	**10**	**150**
2	**7** / **50**	**11**	**11** / **125**	**175**
3	**4**	**5** / **100**	**12** / **175**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Bước 2.

- Các ô trống lần lượt là 1B, 1C, 2B và cuối cùng là 3A.
- Chu trình tương ứng với ô 1B là: 1B-3B-3C-2C-2A-1A. Chỉ số cải tiến cho ô 1B là $I_{1B} = 8 - 5 + 12 - 11 + 7 - 6 = 5 > 0$.

- Chu trình tương ứng với ô 1C là: 1C-2C-2A-1A. Chỉ số cải tiến cho ô 1C là $I_{1C} = 10 + 7 - 6 - 11 = 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 2B là: 2B-2C-3C-3B. Chỉ số cải tiến cho ô 2B là $I_{2B} = 11 - 11 + 12 - 5 = 7 > 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 3A là: 3A-3C-2C-2A. Chỉ số cải tiến là $I_{3A} = 4 - 12 + 11 - 7 = -4 < 0$.
- Phương án chưa tối ưu vì tồn tại đúng 1 chỉ số cải tiến âm. Ta sẽ chọn cải tiến chu trình tương ứng là chu trình của ô 3A.
- Tương tự như bước 1, ta sẽ cải tiến được phương án như sau:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6** / **150**	**8**	**10**	**150**
2	**7**	**11**	**11** / **175**	**175**
3	**4** / **50**	**5** / **100**	**12** / **125**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Bước 3.
- Các ô trống lần lượt là 1B, 1C, 2A và cuối cùng là 2B.
- Chu trình tương ứng với ô 1B là: 1B-3B-3A-1A. Chỉ số cải tiến cho ô 1B là $I_{1B} = 8 - 5 + 4 - 6 = 1 > 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 1C là: 1C-3C-3A-1A. Chỉ số cải tiến cho ô 1C là $I_{1C} = 10 - 12 + 4 - 6 = -6 < 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 2A là: 2A-2C-3C-3A. Chỉ số cải tiến cho ô 2A là $I_{2A} = 7 - 11 + 12 - 4 = 4 > 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 2B là: 2B-2C-3C-3B. Chỉ số cải tiến là $I_{2B} = 11 - 11 + 12 - 5 = 7 > 0$.
- Phương án chưa tối ưu vì tồn tại đúng 1 chỉ số cải tiến âm. Ta sẽ chọn cải tiến chu trình tương ứng là chu trình của ô 1C.
- Tương tự như bước 1, ta sẽ cải tiến được phương án như sau:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6** / **25**	**8**	**10** / **125**	**150**
2	**7**	**11**	**11** / **175**	**175**
3	**4** / **175**	**5** / **100**	**12**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Bước 4.
- Các ô trống lần lượt là 1B, 2A, 2B và cuối cùng là 3C.
- Chu trình tương ứng với ô 1B là: 1B-3B-3A-1A. Chỉ số cải tiến cho ô 1B là $I_{1B} = 8 - 5 + 4 - 6 = 1 > 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 2A là: 2A-2C-1C-1A. Chỉ số cải tiến cho ô 2A là $I_{2A} = 7 - 11 + 10 - 6 = 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 2B là: 2B-3B-3A-1A-1C-2C. Chỉ số cải tiến cho ô 2B là $I_{2B} = 11 - 5 + 4 - 6 + 10 - 11 = 3 > 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 3C là: 3C-1C-1A-3A. Chỉ số cải tiến là $I_{3C} = 12 - 10 + 6 - 4 = 0$.
- Phương án này là phương án tối ưu vì không có chỉ số cải tiến âm.

Người đọc được khuyến khích tính các giá trị hàm mục tiêu tại các phương án trong các bước trên để nhìn thấy rõ là phương án sau tốt hơn phương án trước.

Câu 9. Ta đã biết phương án ban đầu đạt được bằng cách sử dụng phương pháp chi phí rẻ nhất ở câu 4 là:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6**	**8** / **25**	**10** / **125**	**150**
2	**7**	**11**	**11** / **175**	**175**
3	**4** / **200**	**5** / **75**	**12**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Tương tự như câu 8, ta sẽ sử dụng phương pháp duyệt tuần tự để xác định phương án tối ưu từ phương án ban đầu này.

Bước 1.
- Các ô trống lần lượt là 1A, 2A, 2B và cuối cùng là 3C.
- Chu trình tương ứng với ô 1A là: 1A-1B-3B-3A. Chỉ số cải tiến là $I_{1A} = 6 - 8 + 5 - 4 = -1 < 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 2A là: 2A-2C-1C-1B-3B-3A. Chỉ số cải tiến là $I_{2A} = 7 - 11 + 10 - 8 + 5 - 4 = -1 < 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 2B là: 2B-2C-1C-1B. Chỉ số cải tiến là $I_{2B} = 11 - 11 + 10 - 8 = 2 > 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 3C là: 3C-1C-1B-3B. Chỉ số cải tiến là $I_{3C} = 12 - 10 + 8 - 5 = 5 > 0$.
- Phương án chưa tối ưu vì vẫn tồn tại chỉ số cải tiến âm. Trong các chỉ số cải tiến trên thì chỉ số cải tiến của ô 1A và 2A là như nhau, nên ta chọn một trong hai. Ta sẽ chọn cải tiến chu trình 1A.
- Tương tự như câu 8, ta sẽ cải tiến được phương án như sau:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	**6** **25**	**8**	**10** **125**	**150**
2	**7**	**11**	**11** **175**	**175**
3	**4** **175**	**5** **100**	**12**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Bước 2.
- Các ô trống lần lượt là 1B, 2A, 2B và cuối cùng là 3C.
- Chu trình tương ứng với ô 1B là: 1B-3B-3A-1A. Chỉ số cải tiến cho ô 1B là $I_{1B} = 8 - 5 + 4 - 6 = 1 > 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 2A là: 2A-2C-1C-1A. Chỉ số cải tiến cho ô 2A là $I_{2A} = 7 - 11 + 10 - 6 = 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 2B là: 2B-3B-3A-1A-1C-2C. Chỉ số cải tiến cho ô 2B là $I_{2B} = 11 - 5 + 4 - 6 + 10 - 11 = 3 > 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 3C là: 3C-1C-1A-3A. Chỉ số cải tiến là $I_{3C} = 12 - 10 + 6 - 4 = 0$.
- Phương án này là phương án tối ưu vì không có chỉ số cải tiến âm.

Lưu ý rằng: sau bước 1 ở trên, ta đạt được phương án ở bước 3 của câu số 8. Nên bước 2 ở trên thực ra chính là bước 4 của câu số 8. Ngoài ra thì một lưu ý nữa là tất cả các bước của câu 8 đều không dẫn đến phương án ban đầu của phương pháp chi phí rẻ nhất.

Câu 10. Ta đã biết phương án ban đầu đạt được bằng cách sử dụng phương pháp xấp xỉ Vogel ở câu 6 là:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	[**6**]	[**8**]	[**10**] **150**	**150**
2	[**7**] **175**	[**11**]	[**11**]	**175**
3	[**4**] **25**	[**5**] **100**	[**12**] **150**	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Tương tự như câu 8 và câu 9, ta sẽ sử dụng phương pháp duyệt tuần tự để xác định phương án tối ưu từ phương án ban đầu này.

Bước 1.

- Các ô trống lần lượt là 1A, 1B, 2B và cuối cùng là 2C.
- Chu trình tương ứng với ô 1A là: 1A-1C-3C-3A. Chỉ số cải tiến là $I_{1A} = 4 > 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 1B là: 1B-1C-3C-3B. Chỉ số cải tiến là $I_{1B} = 5 > 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 2B là: 2B-3B-3A-2A. Chỉ số cải tiến là $I_{2B} = 3 > 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 2C là: 2C-3C-3A-2A. Chỉ số cải tiến là $I_{2C} = -4 < 0$.
- Phương án chưa tối ưu vì vẫn tồn tại chỉ số cải tiến âm (là duy nhất I_{2C}), ta chọn chu trình cải tiến là chu trình tương ứng với ô 2C.
- Tương tự như câu 8 và câu 9, ta sẽ cải tiến được phương án như sau:

To / From	**A**	**B**	**C**	Supply
1	[**6**]	[**8**]	[**10**] **150**	**150**
2	[**7**] **25**	[**11**]	[**11**] **150**	**175**
3	[**4**] **175**	[**5**] **100**	[**12**]	**275**
Demand	**200**	**100**	**300**	**600**

Bước 2.
- Các ô trống lần lượt là 1A, 1B, 2B và cuối cùng là 3C.
- Chu trình tương ứng với ô 1A là: 1A-1C-2C-2A. Chỉ số cải tiến $I_{1A} = 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 1B là: 1B-3B-3A-2A-2C-1C. Chỉ số cải tiến $I_{1B} = 1 > 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 2B là: 2B-3B-3A-2A. Chỉ số cải tiến $I_{2B} = 3 > 0$.
- Chu trình tương ứng với ô 3C là: 3C-2C-2A-3A. Chỉ số cải tiến $I_{3C} = 4 > 0$.
- Phương án này là phương án tối ưu vì không có chỉ số cải tiến âm.

Lưu ý rằng: phương án tối ưu này không trùng với phương án tối ưu ở câu 8 và câu 9. Ta hãy so sánh giá trị của hàm mục tiêu tại các phương án này.

- Đối với phương án tối ưu đạt được ở câu 8 và câu 9, giá trị hàm mục tiêu là

$$6 \cdot 25 + 10 \cdot 125 + 11 \cdot 175 + 4 \cdot 175 + 5 \cdot 100 = 4525$$

- Đối với phương án tối ưu đạt được ở câu 10, giá trị hàm mục tiêu là

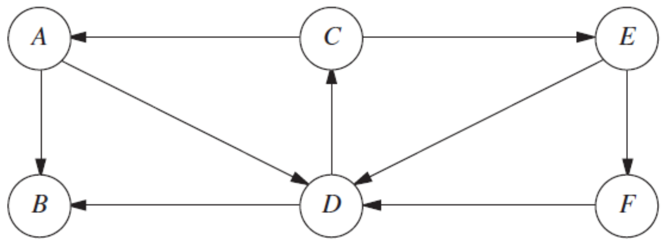
$$10 \cdot 150 + 7 \cdot 25 + 4 \cdot 175 + 5 \cdot 100 + 11 \cdot 150 = 4525.$$

Chương 3

Bài toán Tối ưu Mạng (Network Optimisation models)

3.1 Bài tập tự luận

Câu 1. Cho đồ thị sau:

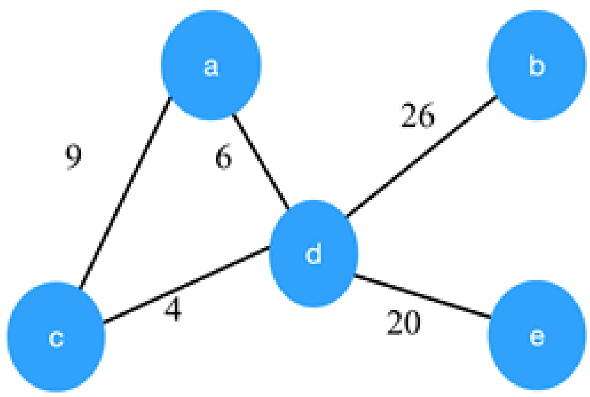


(a) Tìm một đường đi có hướng từ đỉnh A tới đỉnh F, sau đó tìm 3 đường đi vô hướng khác nhau cũng từ A tới F.

(b) Tìm một chu trình có hướng đi qua 3 đỉnh. Sau đó tìm một chu trình vô hướng đi qua tất cả các đỉnh.

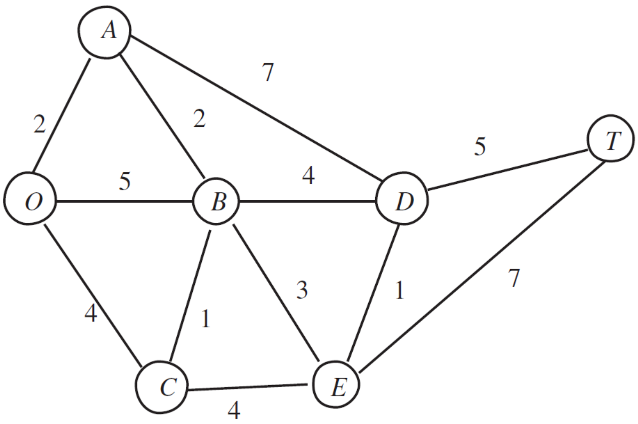
(c) Xác định một spanning tree.

Câu 2. Cho biết rằng các cạnh của đồ thị sau biểu diễn độ dài của quảng đường để di chuyển giữa các đỉnh.



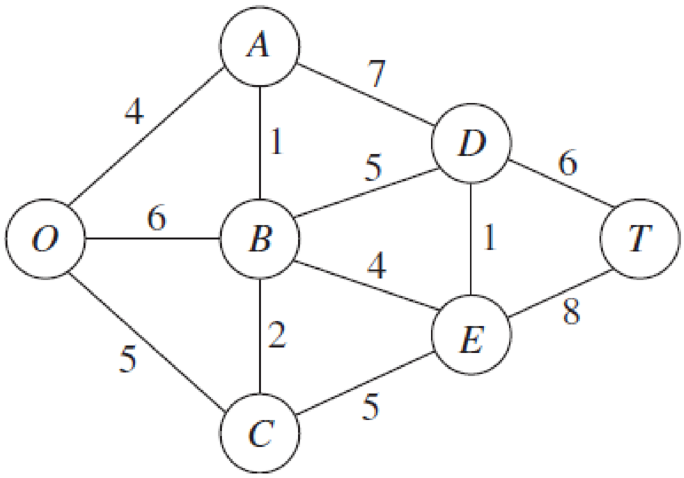
Xác định một phương án đi qua tất cả các đỉnh sao cho quảng đường đi là ngắn nhất.

Câu 3. Cho biết rằng các cạnh của đồ thị sau biểu diễn độ dài của quảng đường để di chuyển giữa các đỉnh.



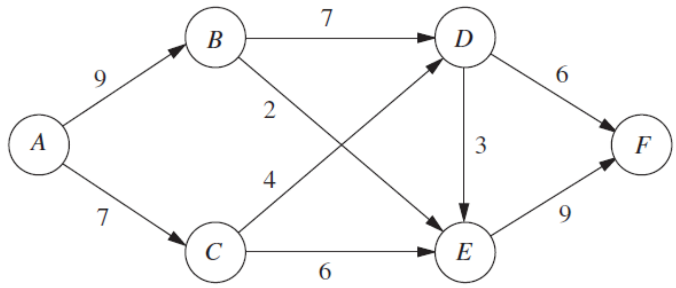
Xác định một phương án để đi từ đỉnh O đến đỉnh T sao cho quảng đường đi là ngắn nhất.

Câu 4. Cho biết rằng các cạnh của đồ thị sau biểu diễn độ dài của quảng đường để di chuyển giữa các đỉnh.



Xác định một phương án để đi từ đỉnh O đến đỉnh T sao cho quảng đường đi là ngắn nhất.

Câu 5. Cho biết rằng các cạnh của đồ thị sau biểu diễn lưu lượng tối đa có thể vận chuyển giữa các đỉnh.



Xác định lưu lượng vận chuyển tối đa từ đỉnh A tới đỉnh F.

Câu 6. Cho biết rằng các cạnh của đồ thị ở câu 5 biểu diễn chi phí vận chuyễn mỗi tấn đơn vị hàng hóa giữa các đỉnh. Xác định đường đi để có thể vận chuyển 1 tấn hàng hóa từ đỉnh A tới đỉnh F với chi phí thấp nhất.

3.2 Bài tập trắc nghiệm

Câu 1. Sự khác biệt giữa bài toán phân luồng để cực tiểu hóa chi phí (the minimal cost network flows) và bài toán vận tải (transportation problems) là gì?

A. Bài toán phân luồng để cực tiểu hóa chi phí là một trường hợp đặc biệt của bài toán vận tải.

B. Bài toán vận tải là một trường hợp đặc biệt của bài toán phân luồng để cực tiểu hóa chi phí.

C. Không có sự khác biệt nào.

D. Bài toán vận tải được xây dựng dựa vào các bảng, trong khi bài toán phân luồng để cực tiểu hóa chi phí được xây dựng dựa trên đồ thị.

Câu 2. Sự khác biệt giữa bài toán tìm đường đi ngắn nhất (shortest path problems) và bài toán cây cực tiểu (minimum spanning tree problems) là gì?

A. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất là một trường hợp đặc biệt của bài toán cây cực tiểu.

B. Bài toán cây cực tiểu là một trường hợp đặc biệt của bài toán tìm đường đi ngắn nhất.

C. Không có sự khác biệt nào.

D. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất không yêu cầu phải đi qua tất cả các đỉnh (nodes), trong khi bài toán cây cực tiểu thì có yêu cầu.

Câu 3. Bài toán cây cực tiểu (minimum spanning tree problems) luôn có nghiệm duy nhất.

A. Đúng B. Sai

Câu 4. Khẳng định nào sau đây là sai đối với đồ thị biểu diễn nghiệm của bài toán mô hình cây cực tiểu.

A. Nó là một đồ thị.

B. Nó là một đồ thị con của đồ thị ban đầu.

C. Nó bao gồm tất cả các đỉnh của đồ thị ban đầu.

D. Nó có thể chứa một chu trình hoặc không.

Câu 5. Đặc điểm nào sau đây đúng với mọi đồ thị vô hướng? (khoanh tròn mọi đáp án đúng)

A. Nó có thể chứa một chu trình hoặc không.

B. Luôn có thể đi từ một đỉnh bất kì sang một đỉnh bất kì khác.

C. Không có đường đi một chiều.

D. Nó phải chứa ít nhất cạnh.

Câu 6. Một đồ thị vô hướng đơn (simple undirected graph) được gọi là hoàn hảo (complete) nếu 2 cặp đỉnh bất kì đều có kết nối với nhau. Tính số các spanning trees trong một đồ thị hoàn hảo có 4 đỉnh.

A. 16. B. 4. C. 8. D. 12.

Câu 7. Một sinh viên muốn đi du lịch qua tất cả thành phố của nước Pháp với chi phí thấp nhất. Để giải quyết vấn đề đó chúng ta dùng bài toán nào sau đây?

A. Bài toán tìm đường đi ngắn nhất (shortest path problems)

B. Bài toán cây cực tiểu (minimum spanning tree problems).

C. Bài toán cực đại hóa lưu lượng (xaximum flow problems).

D. Cả 3 đáp án trên đều sai.

3.3 Đáp án

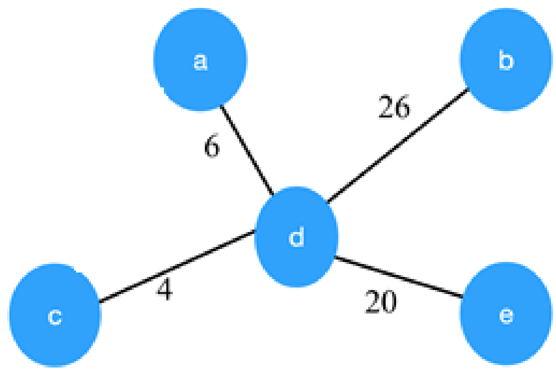
Đáp án phần trắc nghiệm: 1D, 2D, 3B, 4D, 5AC, 6A, 7B.

Tiếp theo là đáp án (hướng dẫn) cho phần bài tập tự luận.

Câu 1. Đây là một câu cơ bản về lý thuyết đồ thị, sinh viên được yêu cầu tự giải câu này.

Câu 2. Đây là bài toán cây cực tiểu (minimum spanning tree problem). Sinh viên có thể áp dụng phương pháp được đưa ra trong bài giảng như sau:

- Xuất phát từ đỉnh c, tìm đường đi ngắn nhất từ c là d, ta được đường đi c-d.
- Xuất phát từ một trong 2 đỉnh c hoặc d thì đường đi ngắn nhất tới các đỉnh còn lại là d-a, ta được c-d-a.
- Xuất phát từ một trong các đỉnh c, d, a thì đường đi ngắn nhất tới các đỉnh còn lại là d-e (thực ra không có đường đi từ a và c tới các đỉnh b, e).
- Ở bước này, ta có thể tiếp tục áp dụng thuật toán hoặc có thể nhận ra ngay là b chỉ kết nối với d nên ta được ngay cây cực tiểu là



Câu 3. Đây là bài toán tìm đường đi ngắn nhất (shortest path problem). Đơn nhiên là ta có thể liệt kê ra tất cả các đường đi khả dĩ từ O đến T rồi tính khoảng cách của tất cả chúng và suy ra đường đi ngắn nhất. Tuy nhiên, việc làm đó mất khá nhiều thời gian. Thực ra ta có một nhận xét ngay rằng: để đi từ O đến B ta có thể đi các con đường O-A-B (độ dài là 4) hoặc O-B (độ dài là 5) hoặc O-C-B (độ dài là 5). Nên từ đó suy ra, ta có thể loại con đường O-B ra khỏi con đường ngắn nhất vì ta đã có con đường ngắn hơn thay thế là O-A-B. Xuất phát từ ý tưởng đó, ta có thuật toán mà sinh viên được học trong giáo trình như sau:

- Từ điểm xuất phát, xác định con đường ngắn nhất.
- Từ điểm xuất phát và các đỉnh xác định ở bước trước, ta xác định các đỉnh tiếp theo làm cho đường đi ngắn nhất. Và cứ tiếp tục như vậy cho đến đích.

Ta sẽ minh họa thuật toán ấy qua ví dụ sau:

- Các đường đi xuất phát từ O là O-A, O-B, và O-C. Đường đi ngắn nhất: O-A (độ dài 2).
- Đường đi ngắn nhất xuất phát từ O tiếp theo là O-C (độ dài là 4). Đường đi ngắn nhất xuất phát từ A A-B (độ dài là 2). Đường đi: (1) O-A-B (độ dài là 4) và (2) O-C (độ dài là 4).
- Đường đi còn lại xuất phát từ O là O-B (độ dài là 5). Nên không còn đường đi nào ngắn hơn hai đường đi kể trên có thể xuất phát từ O. Đường đi: (1) O-A-B (độ dài là 4) và (2) O-C (độ dài là 4).
- Vì không còn đường đi nào ngắn hơn xuất phát từ O, nên ta chuyển sang xét các đỉnh A, B và C.
- Tiếp tục như vậy, ta sẽ có được đường đi ngắn nhất là O-A-B-D-T hoặc O-A-B-E-D-T (cùng có độ dài là 13).

Câu 4. Tương tự như câu 3.

Câu 5. Lưu lượng vận chuyển cực đại là 15 theo các con đường sau: A-B-D-F (6) và A-B-E-F (2) và A-C-D-E-F (1) và A-C-E-F (6).

Câu 6. Chi phí tối thiểu là 7 đi theo đường A-C-D-F.